Toppersnotes
Unleash the topper in you

IIT - JEE

JEE MAIN & ADVANCED

NATIONAL TESTING AGENCY

गणित

भाग – 3

SIERRA INNOVATIONS

विषय सूची

आव्यूह एवं सारणिक

आव्यूह :- संख्याओं की एक आयताकार व्यवस्था को आव्यूह कहते हैं।

Symbol :- [ ] या ( ) या || ||

Eg. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{1\times 6}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{6\times 1}$

Elements of Matrix

order of Matrix

यदि mn अवयवों को m पंक्तियों तथा n स्तम्भों के रूप में व्यवस्थित किया जाए तो इसे m×n क्रम का आव्यूह कहते हैं।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -- & a_{ij} & -- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -- & a_{2j} & -- & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & -- & a_{ij} & -- & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & -- & a_{mj} & -- & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = [a_{ij}]_{mn}$$

$a_{ij} \Rightarrow$ elements of i^{th} row And j^{th} Coloumn

(1) एक आव्यूह का कोई मान नहीं होता है। यह केवल संख्याओं की एक व्यवस्था है।

(2) अवयवों a_{11} a_{22}, a_{33} --- ic a_{ii} को विकर्ण अवयव कहते हैं

तथा जिस रेखा के अनुदिश विकर्ण अवयव उपस्थित होते हैं। उसे मुख्य विकर्ण (Principle Diagonal) कहते हैं।

(3) विकर्ण अवयवों के योगफल को आव्यूह का अनुरेख (trace) कहते हैं।

आव्यूह A के अनुरेख को $tr(A)$ कहते हैं।

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

मुख्य विकर्ण   मुख्य विकर्ण

$tr(A) = 10$ $tr(B) = 9$

Question यदि एक आव्यूह में 12 अवयव हैं तो आव्यूह के विकर्ण सम्भावित क्रम बताइए ?

Solution

1×12

2×6

3×4

4×3

6×2

12×1

Question एक 2×3 क्रम का आव्यूह A बनाइए जिसके लिए $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ है।

Solution $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad a_{11} = \frac{(1-2)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

Que. उपरोक्त प्रश्न में आव्यूह एक का tract बताइए?

Ans. $tr(A) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

TYPES OF METRIX (आव्यूह के प्रकार)

(1) पंक्ति आव्यूह (Row matrix) – ऐसा आव्यूह जिसमें एक पंक्ति

$$A = [a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; — \; a_{1n}]_{1\times n}$$

(2) स्तम्भ आव्यूह (coloum matrix) → ऐसा आव्यूह जिसमें एक स्तम्भ हो

$$A \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ | \\ a_{1m} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

(3) शून्य आव्यूह :- (O)
ऐसा आव्यूह जिसके अवयव शून्य हो

Ex $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

(4) वर्ग आव्यूह :- (square matrix).
ऐसा आव्यूह जिसमें पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या समान हो।

Ex- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

एक $n\times n$' क्रम के आव्यूह को 'n' क्रम का वर्ग आव्यूह कहते है तथा इसे $[a_{ij}]_n$ प्रदर्शित करते हैं।

(5) विकर्ण आव्यूह :- ऐसा वर्ग आव्यूह जिसमें सभी "non-diagonal element" शून्य हो। अर्थात

$[a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j]$

Ex-
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} ✓$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} \checkmark$$

(*) एक विकर्ण आव्यूह $A = [a_{ij}]_n$ को $A = \text{Diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, --- a_{nn})$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$A = \text{Diag}(2, -1, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6) स्केलर आव्यूह (अदिश आव्यूह) :- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके सभी विकर्ण अवयव समान हो।

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$ विकर्ण आव्यूह है 'अदिश' आव्यूह नहीं है।

[7] Unit matrix (इकाई आव्यूह) :- ऐसा विकर्ण आव्यूह जिसके सभी विकर्ण अवयव 1 हो

'n' क्रम के इकाई आव्यूह को I_n से प्रदर्शित करते हैं।

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न :- 'n' क्रम के विकर्ण आव्यूह में अधिकतम अशून्य अवयवों संख्या तथा न्यूनतम शून्यों की संख्या बताइए।

Ans. :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0\,0 & - - - & 0 \\ 0 & a_{22} & - - & 0 \\ | & & & \\ 0 & - & - - & a_{nn} \end{bmatrix}_n$$

max^m nonzero elements $\rightarrow n$

min^m no. of zero $= n^2 - n$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[8] ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह :- [upper triangular matrix]

एक आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ऊपरी त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है। यदि $\boxed{a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j}$

ex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0_1 & 0_2 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

अर्थात ऐसा आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे के समस्त अवयव शून्य हैं।

निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह :- (lower triangular matrix)

एक आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ निम्न त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है। यदि $\boxed{a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j}$

ex.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0_2 & 0_3 & 0_4 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

अर्थात ऐसा आव्यूह जिसके मुख्य विकर्ण के ऊपर वाले सभी अवयव शून्य हो।

तुलनात्मक आव्यूह :- (Comparable Matrix)

दो आव्यूह तुलनात्मक आव्यूह कहलाते हैं यदि उनके क्रम समान हो।

Equality of matrix (आव्यूहों की समानता)

दो तुलनात्मक आव्यूह समान आव्यूह कहलाते हैं यदि उनके संगत अवयव बराबर हो।

अर्थात यदि $A = [a_{ij}]_{M\times n}$ एवं $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ हो तो

$$\boxed{A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ i \,\&\, j}$$

Que. (1) यदि $\begin{bmatrix} x-y & z \\ 2x-y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो x, y, z, w

Ans. $x-y=-1$ $\quad 2x-y=0$ $\quad x=1 \; y=2$

$z=4$ $\quad w=5$

Que. 2 यदि $\begin{bmatrix} \sin\theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cos\theta \\ \cos\theta & \tan\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sin\theta \\ \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -1 \end{bmatrix}$

Ans. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{4}; n \in I$

$\tan\theta = -1$

Addition of Matrix (आव्यूहों का योगफल)

दो आव्यूहों को जोड़ा जा सकता है। यदि उनका क्रम समान हो।

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

जहाँ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ex. यदि

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & x & y \\ z & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$$

तो x, y, z, a, b, c के मान बताओ ?

Ans. $= \begin{pmatrix} 6 & x & y-1 \\ 2+z & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & b & c \end{pmatrix}$

$\therefore a = 6, \; x = 2, \; y = 7, \; z = 0, \; b = 4, \; c = 5$

एक आव्यूह का किसी अदिश राशि से गुणन :

यदि किसी आव्यूह को किसी अदिश K से गुणा किया जाए तो आव्यूह का प्रत्येक अवयव उस अदिश राशि से गुणा हो जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ हो तो $KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & Ka_{23} \end{bmatrix}$

Eg. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Comon $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

properties of Metrix addition :-

(1) आव्यूह योगफल क्रम विनिमय नियम की पालन करता है

$A+B = B+A$ (क्रम विनिमय) (comulative)

[2] साहचर्य नियम $\Rightarrow A+(B+C) = (A+B)+C$ (Associate)

[3] $A+O = O+A$

[4] $d(A+B) = dA + dB$

[5] $A + (-A) = 0$

Que. (1) यदि $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ -6 & 2 & 13 \end{bmatrix}$

$A-B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ तो आव्यूह A व B ज्ञात करें।

Ans. $2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$2B = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 14 \\ -6 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Que. 2 यदि $2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ तो x तथा y के मान :-

Ans. :- $\begin{pmatrix} y+2 & 6 \\ 1 & 2x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

$$y+2=5$$
$$2x+2=8$$

Matrix Multiplication (आव्यूहों का गुणनफल)

$\boxed{\text{Row} \times \text{coulmn}}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 2+(-2)+12 & 8+1+20 \\ 1+6+0 & 4-3+0 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 29 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$\boxed{A_{m\times n}\, B_{n\times p} = AB_{m\times p}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2+4 & -4+12 & 4+0 \\ 4-1 & -2-3 & 8+0 \\ 6+5 & -3+15 & 12+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 11 & 4 \\ 3 & -5 & 8 \\ 11 & 12 & 12 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

⇒ गुणनफल AB में आव्यूह A को पूर्व गुणज (prepedth) Matrix तथा आव्यूह B को पश्चगुणज कहते है।

⇒ आव्यूह गुणनफल AB परिभाषित होगा यदि और केवल यदि पूर्व गुणज में स्तम्भों की संख्या तथा पश्च गुणज में पंक्तियों की संख्या समान हो

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = (AB)_{m\times p}$$

⇒ गुणनफल AB परिभाषित हो तो यह आवश्यक नही कि BA भी परिभाषित हो।

Ex. $A_{2\times3} \cdot B_{3\times4}$

AB → defiend

BA → Not defiend

⇒ यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तो $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ ---- to on

⇒ सामान्यतया $AB \neq BA$

(i) यदि $AB = BA$ हो जाए तो matrix A & B are said to commute (क्रम विनिमय)

(ii) यदि $AB = -BA$ हो तो ----- " --- anti commute

Que. [1] यदि $A+B$ तथा AB दोनों परिभाषित हो तो दोनों आव्यूहों के क्रम पर टिप्पणी करें।

Ans. $A+B$ is defined ⇒ A & B are of same order

$A_{m\times n} \cdot B_{m\times n} = AB$ is defined ⇒ $n = m$

∴ A एवं B समान क्रम के वर्ग आव्यूह

Que. [2] यदि $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ then

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA$

(C) A एवं B समान क्रम के वर्ग आव्यूह है।

(D) N.O.T.

Ans:- $A+B$ is defined $\Rightarrow$ A & B are of Same order
A^2 & B^2 are $\Rightarrow$ A & B are square matrix

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B)$$

$$\Rightarrow (A+B)^2 = A(A+B) + B(A+B)$$

$$\Rightarrow (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\Rightarrow A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\Rightarrow AB = BA$$

Que. 3 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ तो AB व BA ज्ञात करे।

Que. 4 यदि $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो तो

p.t. $A(\alpha).A(\beta) = A(\alpha+\beta)$

Ans 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4+14 & 5-16 & 6+4 \\ 12-28 & 15+32 & 18-8 \\ 20+42 & 25-48 & 30+12 \end{bmatrix}$$

$$AB \begin{bmatrix} 18 & -11 & 10 \\ -16 & 47 & 10 \\ 62 & -23 & 42 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 2 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4+15+30 & 8-20+36 \\ 7-24+10 & 14+32+12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 49 & 48 \\ -7 & 58 \end{bmatrix}$$

Ans [4] $A(a) = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad A(B) = \begin{bmatrix} \cos B & -\sin B \\ \sin B & \cos B \end{bmatrix}$$

$$A(\alpha) \cdot A(B) = A(\alpha + B)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha \cos B - \sin\alpha \sin B & +\cos\alpha \sin B - \cos B \sin\alpha \\ \sin\alpha \cos B + \cos\alpha \sin B & -\sin\alpha \sin B + \cos\alpha \cos B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \cos B & -\sin\alpha - \sin B \\ \sin\alpha + \sin B & \cos\alpha + \cos B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Que. 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

AB & BA

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0+0 & 00 \\ 00 & 00 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0+0 & 8+18 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 26 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

properties of metrix multiplication :-

(1) सामान्यतया $AB \neq BA$ (अतः आव्यूह गुणनफल क्रम विनिमय नियम का पालन नहीं करता)

(2) $A(B+C) = AB + AC$ (बंटन नियम)

$(B+C)A = BA + CA$ ✓

$AB + AC = A(B+C)$ ✓