Toppersnotes®
Unleash the topper in you

2nd – Grade

Mathematics

Senior Teacher

Rajasthan Public Service Commission

Paper - 2

Volume – 1

(Secondary & Senior Secondary Standard)

SIERRA INNOVATIONS

2nd Grade

CONTENTS

Matrices & Determinants

① परिभाषा :- पंक्ति और स्तम्भों में किसी सुनिश्चित क्रम से व्यवस्थित संख्याएँ जो आयताकार व्यूह मे लिखी हो मैट्रिक्स या आव्यूह कहलाती है।

उदा :-

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \leftarrow \text{पहली पंक्ति} \\ \leftarrow \text{दूसरी पंक्ति (Rows)} \\ \leftarrow \text{तीसरी पंक्ति} \end{array}
$$

पहला स्तंभ, दूसरा स्तंभ, तीसरा स्तंभ, चौथा स्तंभ (Columns)

② आव्यूह की कोटि :-
m पंक्तियों (Rows) तथा n स्तम्भों (Columns) वाले किसी आव्यूह कोटि $m \times n$ कहलाती है।
अर्थात पंक्तियों तथा स्तम्भों का गुणनफल $(m\times n)$ उस आव्यूह की कोटि कहलाती है।

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}_{m\times n}
$$

यह एक $m\times n$ कोटि आयताकार आव्यूह है। आव्यूह को प्रदर्शित करने के लिए अक्षरो A, B, C ···· का प्रयोग करते है।

Toppersnotes
Unleash the topper in you

संक्षेप में उपर्युक्त आव्यूह को लिख सकते हैं

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \ldots m$

तथा $j = 1, 2, 3, \ldots n$

Example:- ① यदि किसी आव्यूह में 8 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियां क्या हो सकती हैं?

संभव कोटियां :- $m\times n$

$$8 = (1\times 8), (8\times 1), (4\times 2), (2\times 4)$$

Example:- एक ऐसे 3×2 आव्यूह की रचना करो जिसके अवयव $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$ द्वारा प्रदत्त है?

An. एक 3×2 Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j| \quad , i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2$$

$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3\times 1| = 1$ $\quad$ $a_{12} = \frac{1}{2}|1-3\times 2| = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3\times 1| = \frac{1}{2}$ $\quad$ $a_{22} = \frac{1}{2}|2-3\times 2| = 2$

$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3\times 1| = 0$ $\quad$ $a_{32} = \frac{1}{2}|3-3\times 2| = \frac{3}{2}$

अतः अभीष्ट आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}_{3\times 2}$

③ आव्यूहों के प्रकार :-
(Types of Matrics)

[A] स्तंभ आव्यूह (Column Matrix):- वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो स्तंभ आव्यूह कहलाता है।

उदा:- $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ एक 3×1 कोटि का स्तम्भ आव्यूह है

व्यापक रूप $A = [a_{ij}]_{m\times1}$

[B] पंक्ति आव्यूह (Row Matrix):- वह आव्यूह जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो पंक्ति आव्यूह कहलाता है।

उदा:- $B = [-1 \quad 5 \quad 3]$ एक 1×3 कोटि का पंक्ति आव्यूह है।

व्यापक रूप $B = [b_{ij}]_{1\times n}$

[C] वर्ग आव्यूह (Square Matrix):- वह आव्यूह जिसमे पंक्तियो एवं स्तम्भो की संख्या समान हो वर्ग आव्यूह कहलाता है।

अत: $m\times n$ एक वर्ग आव्यूह कहलायेगा यदि $m=n$ हो

उदा:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ 2×2 कोटी का वर्ग आव्यूह

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह

व्यापक रूप $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ एक m कोटि का वर्ग आव्यूह

Note:- यदि $A = [a_{ij}]$ एक n कोटि का वर्ग है तो अवयवों $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \cdots a_{nn}$ को आव्यूह A के विकर्ण के अवयव कहते हैं।

$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \cdots a_{nn}$ को आव्यूह का मुख्य विकर्ण कहते है।
मुख्य विकर्ण के अवयवों के योग को आव्यूह का अनुरेख कहते है।

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

D विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) :- वह वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण अवयवों के अतिरिक्त शेष अवयव शून्य हो, विकर्ण आव्यूह कहलाते है।

उदा :- $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ एक 3x3 कोटि का विकर्ण आव्यूह है।

E अदिश आव्यूह (Scalar Matrix) :- वह विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव समान हो, अदिश आव्यूह कहलाता है।

उदा :- $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ एक 3x3 कोटि का अदिश आव्यूह है।

F तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) :- वह विकर्ण आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव एक (1) हो तत्समक आव्यूह कहलाता है।

उदा $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक 3x3 कोटी का तत्समक आव्यूह है।

किसी n कोटि के तत्समक आव्यूह को I_n द्वारा प्रदर्शित करते है या केवल I

G शून्य आव्यूह (Zero Matrix) :- m×n कोटि का ऐसा आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव शून्य (0) हो, उसे शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहते है।

उदा:- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times4}$ सभी शून्य आव्यूह है।

शून्य आव्यूह को O (बड़े आकार का शून्य) से प्रदर्शित करते है।

$\boxed{H}$ आव्यूहों की समानता:-

दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कहलाते है यदि

(i) वे समान कोटियो के हो तथा

(ii) A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के समान हो अर्थात i व j के सभी मानो के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो

उदाहरण:- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह है

किन्तु $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ समान आव्यूह नही है।

आव्यूह A तथा B समान होने पर A = B लिखते है।

यदि $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$x = -1$ $y = 0$ $z = 2$

$a = \sqrt{6}$ $b = 3$ $c = 2$ होगा।

Example:- ① यदि $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ हो तो

a, b, c तथा d का मान ज्ञात करो

हल:- $2a + b = 4$ $5c - d = 11$

$a - 2b = -3$ $4c + 3d = 24$

समीकरणो को हल करने पर

$a = 1$ $b = 2$ $c = 3$ $d = 4$

(4) आव्यूहों पर संक्रियाएँ :-
(Operations On Matrices)

[A] आव्यूहों का योग :- जब दो आव्यूह A एवं B एक ही कोटि के हो, तो वे योग के लिए सुसंगत होते हैं तथा इनका योग A+B से निरूपित करते हैं। योग को A तथा B के संगत अवयवों को जोड़कर प्राप्त करते हैं।

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

उदाहरण :- $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

दोनो कि कोटियां समान है

$$A + B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & 1+\sqrt{5} & -1+1 \\ 2+(-2) & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

⇒ आव्यूहों के योग के गुणधर्म :-
(Properties of Matrix addition)

(i) क्रम विनिमेय नियम :- यदि A व B दो समान कोटि के आव्यूह हैं तो

$$A + B = B + A$$
$$[A + B]_{m\times n} = [B + A]_{m\times n}$$

(ii) साहचर्य नियम :- यदि A, B तथा C तीन समान कोटि के आव्यूह हैं तो

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$[(A + B) + C]_{m\times n} = [A + (B + C)]_{m\times n}$$

(iii) योज्य तत्समक :- एक $m \times n$ कोटि का शून्य आव्यूह $[O]$ को उसी कोटी के अन्य आव्यूह $[A]$ का तत्समक आव्यूह कहते है।

$$A + O = O + A = A$$

(iv.) योज्य प्रतिलोम :- आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ के लिए $-A = [a_{ij}]_{m \times n}$ इस प्रकार हो कि

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

जहाँ O उसी कोटि का शून्य आव्यूह है। तथा
$-A$ आव्यूह A का योज्य प्रतिलोम या ऋण आव्यूह है।

Note:- आव्यूह का ऋणात्मक आव्यूह :- किसी आव्यूह A का ऋणात्मक आव्यूह $-A$ से निरूपित होता है। अर्थात्

$$-A = (-1)\,A$$

B. आव्यूहो का अन्तर :- जब दो आव्यूह A एवं B एक ही कोटि के हो, तो वे व्यवकलन के लिए सुसंगत होते है तथा इनका अन्तर $A - B$ से निरूपित होता है। अन्तर को A तथा B के संगत अवयवो को घटाकर प्राप्त करते है।

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ तथा $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

उदाहरण :- $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-0 & 4-(-3) & -5-7 \\ 3-8 & -2-(-8) & 1-(-1) \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -12 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

C. एक आव्यूह का एक अदिश से गुणन :-

यदि A कोई आव्यूह है तथा K कोई अशून्य अदिश संख्या है तो आव्यूह A के प्रत्येक अवयव को K से गुणा कर प्राप्त आव्यूह A का K गुणा आव्यूह कहते हैं तथा इसे KA से प्रदर्शित करेंगे।

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$KA = [Ka_{ij}]_{m \times n}$$

उदाहरण:-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ तो } 3A = ?$$

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times3 & 3\times1 & 3\times1.5 \\ 3\times\sqrt{5} & 3\times7 & 3\times(-3) \\ 3\times2 & 3\times0 & 3\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

उदाहरण:- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ तो $2A - B = ?$

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times2 & 2\times3 & 2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 4-(-1) & 6-3 \\ 4-(-1) & 6-0 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ एक आव्यूह के अदिश गुणन के गुणधर्म :-

यदि $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कोटि $m \times n$ वाले दो आव्यूह है और K तथा l अदिश है तो

(i) $K(A+B) = K([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= K[a_{ij} + b_{ij}]$$

$$= ([Ka_{ij}] + [Kb_{ij}])$$

$$= K[a_{ij}] + K[b_{ij}]$$

$$= KA + KB$$

$$\boxed{K(A+B) = KA + KB}$$

(ii) $(K+l)A = (K+l)[a_{ij}]$

$$= [(K+l)a_{ij}]$$

$$= [Ka_{ij}] + [la_{ij}]$$

$$= K[a_{ij}] + l[a_{ij}]$$

$$= KA + lA$$

$$\boxed{(K+l)A = KA + lA}$$

उदाहरण :- (1) यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A + 3X = 5B$ है तो आव्यूह X ज्ञात करें।

हल:- $2A - 3X = 5B$ दोनों पक्षों में 2A घटाने पर

$$2A - 3X - 2A = 5B - 2A$$

$$2A - 2A - 3X = 5B - 2A$$

[-2A, आव्यूह 2A का योज्य प्रतिलोम है]

$$O - 3X = 5B - 2A$$

$$X = \frac{1}{3}[5B - 2A]$$

$$X = \frac{1}{3}\left\{5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right\}$$

$$X = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 8 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\right\}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10-0 \\ 20-8 & 10-(-4) \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{6}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{12}{3} & \frac{14}{3} \\ -\frac{31}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ -\frac{31}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

उदाहरण :- (2) X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

$$X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ हो ?}$$

हल :- (i) $$(X+Y)+(X-Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(X+X)+(Y-Y) = \begin{bmatrix} 5+3 & 2+6 \\ 0+0 & 9-1 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) $$(X+Y)-(X-Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(X-X)+(Y+Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0-0 & 9-(-1) \end{bmatrix}$$

$$2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

उदाहरण :- (3) x तथा y का मान ज्ञात करो यदि

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$ हो ?

हल :-

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 5x \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 5x-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 5x-4 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

$2x+3 = 7$ $\qquad$ $2y-4 = 14$

$2x = 7-3$ $\qquad$ $2y = 14+4$

$2x = 4$ $\qquad$ $2y = 18$

$x = \frac{4}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{18}{2}$

$x = 2$ $\qquad$ $y = 9$

$\boxed{D}$ आव्यूहो का गुणन :-
(Multiplication of Matices).

दो आव्यूहो A तथा B के लिए अनुकूलनीय गुणफल है जब A में स्तम्भों की संख्या, B में पंक्तियो की संख्या के बराबर हो। अर्थात $A = [a_{ij}]_{m \times p}$

$B = [b_{ij}]_{p \times n}$

A व B का गुणनफल $[A \cdot B]_{m \times n}$ होगा।

उदाहरण:- ① $A = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 8 & 10\end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix}5 & 4\\ 50 & 40\end{bmatrix}$ $A \cdot B = ?$

A के स्तम्भ संख्या (2) = B में पंक्तियाँ कि संख्या (2)

हल:-

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 8 & 10\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5 & 4\\ 50 & 40\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix}2 & 5\\ 8 & 10\end{bmatrix} \begin{matrix}\to Ra_1\\ \to Ra_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}\downarrow & \downarrow\\ Ca_1 & Ca_2\end{matrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix}5 & 4\\ 50 & 40\end{bmatrix} \begin{matrix}\to Rb_1\\ \to Rb_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}\downarrow & \downarrow\\ Cb_1 & Cb_2\end{matrix} \end{array}\right]$$

Cb_1 स्तम्भ को Ra_1 पंक्ति से गुणा करने पर a_{11} प्राप्त होगा

Cb_1 स्तम्भ को Ra_2 पंक्ति से गुणा करने पर a_{21} प्राप्त होगा

Cb_2 स्तम्भ को Ra_1 पंक्ति से गुणा करने पर a_{12} प्राप्त होगा

Cb_2 स्तम्भ को Ra_2 पंक्ति से गुणा करने पर a_{22} प्राप्त होगा

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}(5\times2)+(5\times50) & (4\times2)+(40\times5)\\ (5\times8)+(50\times10) & (4\times8)+(40\times10)\end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}10 + 250 & 8 + 200\\ 40 + 500 & 32 + 400\end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}260 & 208\\ 540 & 432\end{bmatrix}$$

उदाहरण:- ② $A = \begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$ तथा $B = \begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}_{2\times3}$

A के स्तम्भ (2) = B की पंक्तियाँ (2)

हल:- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array} \cdot \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \end{array}$

$$\begin{bmatrix} C_1 \times R_1 & C_2 \times R_1 & C_3 \times R_1 \\ C_1 \times R_2 & C_2 \times R_2 & C_3 \times R_2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (2\times6)+(7\times9) & (6\times6)+(6\times9) & (0\times6)+(8\times9) \\ (2\times2)+(7\times3) & (9\times2)+(9\times3) & (0\times2)+(0\times3) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

विशेष:- (i) आव्यूहो के गुणन की अक्रम-विनिमेयता:-
→ यदि $A \cdot B$ परिभाषित है तो यह आवश्यक नहीं है कि $B \cdot A$ भी परिभाषित हो
→ यदि $A \cdot B$ तथा $B \cdot A$ परिभाषित है तो यह आवश्यक नहीं है कि $AB = BA$ हो। अर्थात $AB \neq BA$ हो सकता है।

(ii) दो शुन्येतर आव्यूहो के गुणनफल के रूप में शुन्य आव्यूह:-
→ दो वास्तविक सख्यायें a तथा b के लिए यदि $a \cdot b = 0$ है तो या $a = 0$ या $b = 0$ होता है।
→ परन्तु आव्यूह के लिए यह अनिवार्यतः सत्य नही है।

उदाहरण:- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अर्थात A या B आव्यूह शुन्य न होने पर भी $A \cdot B$ शून्य प्राप्त हुआ

⇒ आव्यूहो के गुणन के गुणधर्म :-

(i) साहचर्य नियम :- यदि A, B तथा C आव्यूहो में आवश्यक गुणन A·B एवं B·C के लिए अनुकूलनीय हो तो साहचर्य नियम का पालन होगा

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)$$

(ii) बंटन नियम :- यदि A, B तथा C आव्यूहो में आवश्यक गुणन एवं योग के अनुकूलनिय हो तो, बंटन नियम का पालन होगा।

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

(iii) गुणन के तत्समक का अस्तित्व :- प्रत्येक वर्ग आव्यूह A के लिए समान कोटि के एक आव्यूह I का अस्तित्व होता है जो

$$IA = AI = A$$

उदाहरण :- (1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

तो ~~AC~~ सत्यापित किजिए $(A+B)C = AC + B\cdot C$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$