



2nd – Grade

Mathematics

Senior Teacher

Rajasthan Public Service Commission

Paper - 2

Volume – 4

(Graduation Standard)



2nd Grade

CONTENTS

Mathematics

(Graduation Standard)

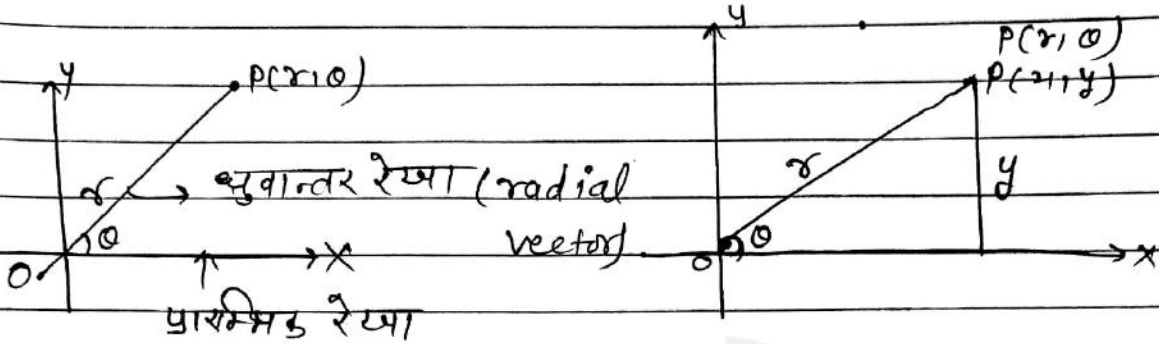
Volume - 4

1.	Abstract Algebra	1
	• Group Theory	1
	• Subgroup	31
	• Complex of group	42
	• Cosets	47
	• Centre of group	54
	• Homomorphism	55
	• Isomorphism	57
2.	Real Analysis	69
3.	Complex Analysis	96
	• Limit, continuity and differentiability of complex function	96
	• Analytic function	99
	• Cauchy-Riemann equation	100
	• Harmonic function	106
	• Conformal mapping	113
4.	Calculus	128

Calculus

अवकलन गणित में

ध्रुवीय निर्देशांक (polar coordinate) :-



बिन्दु $O \rightarrow$ ध्रुव (pole)

$\theta \rightarrow$ ध्रुवान्तर कोण (vectorial angle)

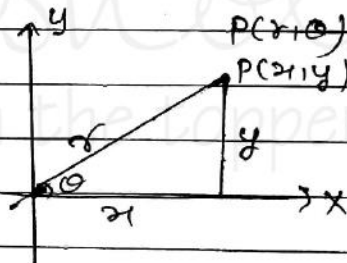
कार्तीय निर्देशांक व ध्रुवीय निर्देशांक में सम्बन्ध :-

$$x = r \cos \theta \quad \text{--- (1)}$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{--- (2)}$$

समी $(1)^2 + (2)^2$ -

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$



$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{--- (3)}$$

$$\boxed{x = r \cos \theta}$$

समी $\frac{(2)}{(1)}$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\boxed{y = r \sin \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{--- (4)}$$

अदि किसी बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक $(-1, \sqrt{3})$ तथा ध्रुवीय निर्देशांक है -

Sol: $r = \sqrt{1+3}$
 $r = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$

$\theta = \frac{3\pi}{3}$

ध्रुवीय निर्देशांक

$\left(2, \frac{3\pi}{3}\right)$ Also

~~$x = r \cos \theta$~~

~~$y = r \sin \theta$~~

~~$-1 = 2 \cos \frac{3\pi}{3}$~~

~~$\sqrt{3} = 2 \sin \frac{3\pi}{3}$~~

~~Ans~~ *

चाप की लम्बाई के अवकलज :- (Derivatives of length of an arc)

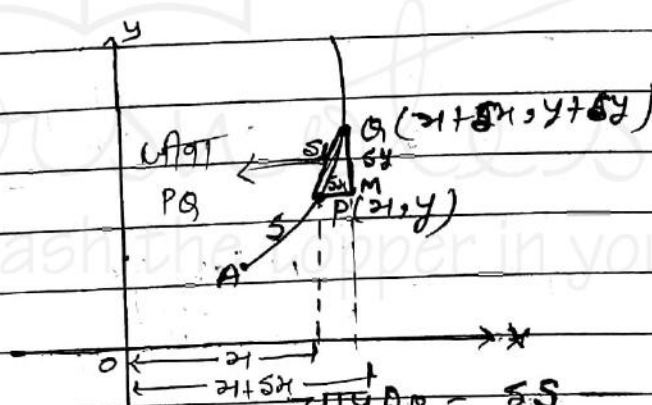
$s = f(x)$
 $\frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}$

जहाँ PQ की लंबाई

APM ΔPMQ से

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$(dx)^2$ से भाग देने पर



जहाँ PQ की लंबाई = ds

$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\left(\frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{ds}{ds} \cdot \frac{dx}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

जब $Q \rightarrow P$ तब $\Delta x \rightarrow 0$

$$\left(\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \right)^2 = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2$$

$$\Rightarrow \because \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\Delta x} = 1$$

$$\left(1 \cdot \frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

① जब वक्र $y = f(x)$ हो -

$$\text{तब } \boxed{\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}}$$

② जब $x = f(t)$, $y = \phi(t)$

$$\text{तब } \boxed{\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}}$$

③ जब वक्र $r = f(\theta)$ हो

$$\text{तब } \boxed{\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2}}$$

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

Ques $r = ae^{c \cot \alpha}$ तब $\frac{ds}{d\theta}$ का मान है -

(1) $r \sin \alpha$ ~~(2) $r \cos \alpha$~~ (3) $r \cot \alpha$

Sol. $\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

$$\frac{dr}{d\theta} = ae^{c \cot \alpha} \cdot c \cot \alpha$$

$$\frac{dr}{d\theta} = r c \cot \alpha$$

अब $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r^2 c^2 \cot^2 \alpha}$

$$\frac{ds}{d\theta} = r c \operatorname{cosec} \alpha \quad \underline{\text{Ans}}$$

Ques $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t + \sin t)$ तब $\frac{ds}{dx} \frac{ds}{dy}$ का मान = ?

Sol. $\frac{dx}{dt} = a \sin t$, $\frac{dy}{dt} = a(1 + \cos t)$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 (1 + \cos t)^2}$$

$$= a \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t + 2 \cos t}$$

$$= a \sqrt{2(1 + \cos t)}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cos^2 t}{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2a \cos t}{2}$$

अब

$$\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{2a \cos t}{2} \cdot \frac{1}{a \sin t}$$

$$= \frac{2a \cos t}{2} \cdot \frac{1}{a \sin t \cos t}$$

$$= \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dy}$$

$$= \frac{2a \cos t}{2} \cdot \frac{1}{2a \cos^2 t}$$

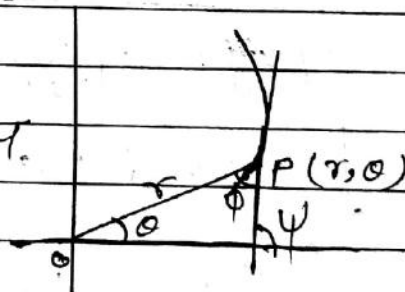
$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sec t}{2}$$

† ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण :-

(Angle between Radius vector and tangent)

ϕ = ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण

ψ = स्पर्श रेखा व -अक्ष के मध्य कोण



ii) $\psi = \theta + \phi$

iii) ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्यकोण

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}$$

Ques वक्र $r = a(1 - \cos \theta)$ के निये ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण है -

या
वह कोण जिस पर ध्रुवान्तर रेखा वक्र को काटती है

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

$$\log r = \log a + \log(1 - \cos \theta)$$

उ के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{r \frac{d\theta}{dr}}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\cancel{2} \sin^2 \theta / 2}{\cancel{2} \sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{1}$$

$$\tan \phi = \frac{\tan \theta}{1} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\theta}{1}} \text{ Ans.}$$

Ques $\frac{r}{r} = 1 + \cos \theta$ तब ϕ का मान है -

Sol $\log r = \log(1 + \cos \theta)$

$$\text{or } \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{r \frac{d\theta}{dr}}{1} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{r \frac{d\theta}{dr}}$$

$$\tan \phi = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\tan \phi = \frac{r \cos^2 \theta}{r \sin \theta \cos \theta}$$

$$\tan \phi = \cot \theta$$

$$\tan \phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{2} - \theta} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

Ques $r^m = a^m \cos m\theta$ तब ϕ का मान है -

Sol

$$m \log r = m \log a + \log \cos m\theta$$

$$r \cdot \frac{dr}{r} = 0 + \frac{-m \sin m\theta}{\cos m\theta}$$

$$\frac{r dr}{r} = \frac{-\cos m\theta}{\sin m\theta}$$

$$\tan \phi = \frac{r dr}{dr}$$

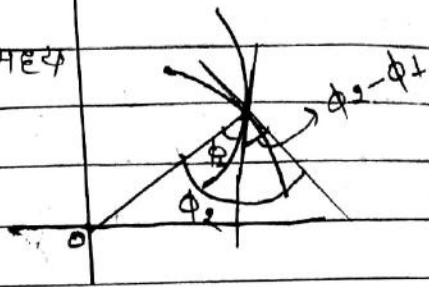
$$\tan \phi = -\cot m\theta$$

$$\tan \phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + m\theta\right)$$

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{2} + m\theta} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

द्वुवीय वक्रों के महय कोण :- (Angle between polar curve)

द्वुवीय वक्रों के महय कोण = स्पर्श रेखाओं के महय कोण



$$\phi = |\phi_2 - \phi_1|$$

$$\tan \phi = \tan(\phi_2 - \phi_1)$$

$$= \frac{\tan \phi_2 - \tan \phi_1}{1 + \tan \phi_2 \tan \phi_1}$$

यदि दोनों वक्र स्पर्श करते हैं (phi = 0)

तब

$$\tan 0 = \frac{\tan \phi_2 - \tan \phi_1}{1 + \tan \phi_2 \tan \phi_1}$$

या

$$\tan \phi_2 - \tan \phi_1 = 0$$

$$\tan \phi_2 = \tan \phi_1$$

(2) दोनों वक्र लम्बवत् होंगे (phi = 90°)

tan 90° = infinity = ∞

$$= \frac{\tan \phi_2 - \tan \phi_1}{1 + \tan \phi_2 \tan \phi_1}$$

$$1 + \tan \phi_2 \tan \phi_1 = 0$$

$$\tan \phi_1 \tan \phi_2 = -1$$

Ques: वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ तथा $r = b(1 - \cos \theta)$ के मध्य कोण ϕ -

वक्र समी (1) से

$$\log r = \log a + \log(1 + \cos \theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{(-\sin \theta)}{1 + \cos \theta}$$

$$\tan \phi_1 = \frac{r d\theta}{dr}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta}$$

$$= - \frac{\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2}}$$

$$\tan \phi_1 = -\cot \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \phi_1 = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \quad \text{--- (3)}$$

वक्र समी (2) से -

$$\log r = \log b + \log(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\tan \phi_2 = \frac{r d\theta}{dr}$$

$$\tan \phi_2 = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2}}$$

$$\therefore \tan \phi_2 = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{\theta}{2} \quad \text{--- (4)}$$

द्वितीय वक्रों के मध्य कोण -

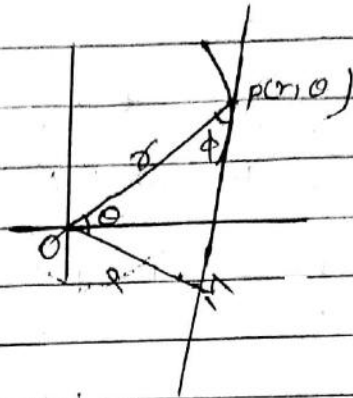
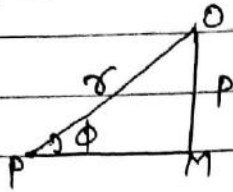
$$\phi = \phi_1 - \phi_2$$

$$= \frac{\pi + \theta}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad \text{Ans.}$$

स्पर्शरेखा से ध्रुव से लम्ब की लम्बाई (Length of perpendicular from pole of tangent)

से - ΔOMP



$$\sin \phi = \frac{p}{r}$$

सूत्र
$$p = r \sin \phi \quad \text{--- (1)}$$

चूंकि
$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr} \quad \text{--- (2)}$$

अब (1) से -

$$p^2 = r^2 \sin^2 \phi$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi}$$

$$= \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} [1 + \cot^2 \phi] \quad \text{--- समीकरण से}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[1 + \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]$$

सूत्र
$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

Ques: वक्र $r = a(1 - \cos \theta)$ पर ध्रुव से लम्ब की लम्बाई है -

Sol:
$$\log r = \log a + \log(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = 0 + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{2 \sin \theta / 2 \cos \theta / 2}{2 \sin^2 \theta / 2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \cot \theta$$

स्पर्श रेखा पर लम्ब डी लः

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} \left[1 + \frac{\cot^2 \theta}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2 (1 - \cos \theta)^2} \cdot \frac{\csc^2 \theta}{2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2 (2 \sin^2 \theta / 2)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{1}{\sin^6 \theta / 2}$$

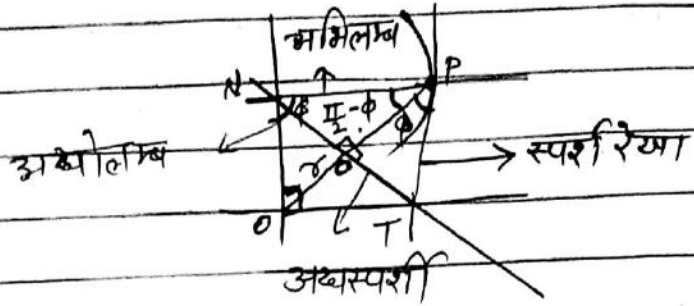
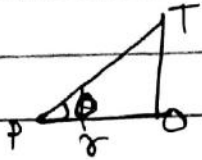
$$p^2 = 4a^2 \sin^6 \theta / 2$$

$$p = 2a \sin^3 \theta / 2 \quad \text{Ans.}$$

ध्रुवीय अक्षस्पर्शी व ध्रुवीय अक्षोलम्ब :-
↓ ↓
 subtangent subnormal

अक्षस्पर्शी

ΔPOT से



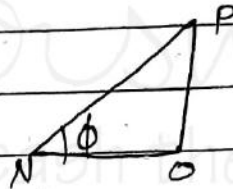
$$\tan \phi = \frac{OT}{r} \Rightarrow OT = r \tan \phi$$

$$\text{अक्षस्पर्शी डील} = r \cdot \left(\frac{dr}{dr} \right)$$

$$\text{अक्षस्पर्शी डील} = r^2 \frac{dr}{dr}$$

अक्षोलम्ब ΔPON से

$$\tan \phi = \frac{r}{ON}$$



$$ON = \frac{r}{\tan \phi}$$

$$\text{अक्षोलम्ब डीलम्बाई} = r \cdot \frac{dr}{dr}$$

$$\text{अक्षोलम्ब डील} = \frac{dr}{dr}$$

$$\text{ध्रुवीय स्पर्श रेखा डील} = r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dr} \right)^2}$$

(PT)